



# Canguru Matemático sem Fronteiras 2014

<http://www.mat.uc.pt/canguru/>

Categoria: Estudante  
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

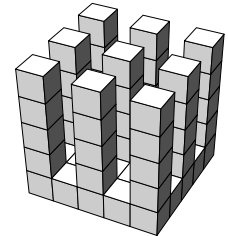
Duração: 1h 30min

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

**Não podes usar calculadora.** Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em  $1/4$  dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

## Problemas de 3 pontos

1. Um cubo era constituído por  $125 = 5^3$  cubos menores, todos com arestas de 1 cm. Alguns desses cubos menores foram retirados de modo a obter o sólido representado na figura. Este sólido é constituído por colunas cada uma com 1 cm ou 5 cm de altura. Quantos cubos dos mais pequenos foram retirados?



(A) 56                      (B) 60                      (C) 64                      (D) 68                      (E) 80

2. A Carla, a Emília e a Liliana fazem hoje anos e a soma das suas idades é 44. Qual será a soma das suas idades da próxima vez que essa soma for um número de dois algarismos iguais?

(A) 55                      (B) 66                      (C) 77                      (D) 88                      (E) 99

3. Se  $a^b = \frac{1}{2}$  então  $a^{-3b}$  é igual a

(A)  $-8$                       (B)  $\frac{1}{8}$                       (C)  $\frac{1}{6}$                       (D) 6                      (E) 8

4. Dentro de três cestos de tamanhos distintos (grande, médio e pequeno) estão 48 bolas. Em conjunto, os cestos grande e pequeno têm o dobro das bolas do cesto médio. O número de bolas que estão no cesto pequeno é metade do número de bolas que estão no cesto médio. Quantas bolas estão no cesto grande?

(A) 16                      (B) 20                      (C) 24                      (D) 30                      (E) 32

5. O valor de  $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$  é igual a

(A) 1                      (B) 2                      (C)  $2^{2011}$                       (D)  $2^{2012}$                       (E)  $2^{2013}$

6. Qual dos polinómios seguintes não é divisível por  $x + 1$ ?
- (A)  $2x + 2$       (B)  $x^2 - 1$       (C)  $x^2 + x$       (D)  $-1 - x$       (E)  $x^2 + 1$
7. Quantos algarismos tem o número natural representado pela expressão  $(2^{22})^5 \times (5^{55})^2$ ?
- (A) 22      (B) 55      (C) 77      (D) 110      (E) 111
8. O Júlio tem uma conta secreta de correio eletrónico, onde só recebe mensagens de 4 amigos. Hoje o Júlio recebeu 8 mensagens nessa conta. Qual das afirmações seguintes, feitas sobre essas 8 mensagens, é seguramente verdadeira?
- (A) O Júlio recebeu 2 mensagens de cada um dos 4 amigos  
(B) O Júlio não pode ter recebido 8 mensagens de um dos seus amigos  
(C) O Júlio recebeu, pelo menos, uma mensagem de cada um dos amigos  
(D) O Júlio recebeu, pelo menos, 2 mensagens de um dos seus amigos  
(E) O Júlio recebeu, pelo menos, 2 mensagens de 2 amigos diferentes
9. Dois cilindros têm a mesma altura e o perímetro da base de um é o dobro do perímetro da base do outro. O volume do cilindro maior é
- (A) o dobro do volume do outro      (B) o triplo do volume do outro  
(C)  $\pi$  vezes o volume do outro      (D) o quádruplo do volume do outro  
(E) 8 vezes o volume do outro
10. Os algarismos do número 2014 são todos diferentes e o algarismo das unidades é maior do que a soma dos restantes. Quantos anos passaram desde que isto ocorreu, pela última vez, antes de 2014?
- (A) 5      (B) 215      (C) 305      (D) 395      (E) 485

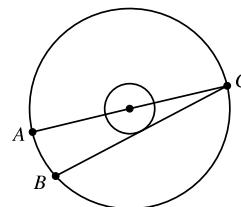
## Problemas de 4 pontos

11. As medidas da altura, da largura e da profundidade de uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular são, respetivamente,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com  $a < b < c$ . Aumentando uma destas medidas pela adição de uma quantidade positiva  $x$ , o volume da caixa aumenta. Em qual dos casos é que esse aumento é maior?
- (A) Se se aumentar  $a$   
(B) Se se aumentar  $b$   
(C) Se se aumentar  $c$   
(D) O aumento do volume é o mesmo quer se aumente  $a$ ,  $b$  ou  $c$   
(E) Depende dos valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$

12. Num torneio de futebol participaram 4 equipas:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Cada uma das equipas jogou 3 jogos, um jogo contra cada uma das outras 3 equipas. Foram atribuídos 3 pontos por cada vitória, 1 por cada empate e 0 por cada derrota. No final do torneio a equipa  $A$  tinha 7 pontos e as equipas  $B$  e  $C$  tinham 4 pontos cada uma. Quantos pontos tinha a equipa  $D$ ?

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4

13. As circunferências representadas na figura têm o mesmo centro e o raio da maior é o triplo do raio da menor. Além disso,  $[AC]$  é um diâmetro da circunferência maior,  $[BC]$  é uma corda dessa circunferência que é tangente à outra e  $\overline{AB} = 12$ . Qual é o raio da circunferência maior?



- (A) 13                      (B) 18                      (C) 21                      (D) 24                      (E) 26

14. Quantos ternos ordenados de números inteiros  $(a, b, c)$ , com  $a > b > c > 1$ , verificam a desigualdade  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$ ?

- (A) Nenhum              (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) Uma infinidade

15. Os números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$  são não nulos,  $n$  é um número natural e sabe-se que os números

$$(-2)^{2n+3} a^{2n+2} b^{2n-1} c^{3n+2} \quad \text{e} \quad (-3)^{2n+2} a^{4n+1} b^{2n+5} c^{3n-4}$$

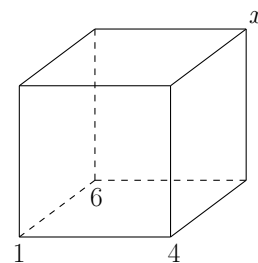
têm o mesmo sinal. Qual das afirmações seguintes é seguramente verdadeira?

- (A)  $a > 0$               (B)  $b > 0$               (C)  $c > 0$               (D)  $a < 0$               (E)  $b < 0$

16. Seis semanas têm  $n!$  segundos. Qual é o valor de  $n$ ?

- (A) 6                      (B) 7                      (C) 8                      (D) 10                      (E) 12

17. Os vértices de um cubo estão numerados de 1 a 8 de tal modo que a soma dos quatro números colocados nos vértices de uma mesma face é igual para todas as faces. Os números 1, 4 e 6 estão colocados como se representa na figura. Qual é o valor de  $x$ ?



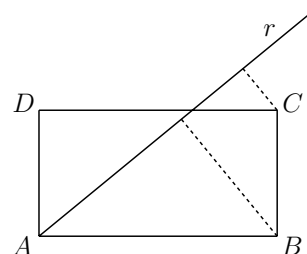
- (A) 2                      (B) 3                      (C) 5                      (D) 7                      (E) 8

18. No rótulo de uma embalagem de pasta de queijo pode ler-se “24% de gordura” e “64% de gordura no produto seco”. Qual é a percentagem de água nesta pasta de queijo?

- (A) 37,5%              (B) 42%                      (C) 49%                      (D) 62,5%              (E) 88%

19. Na figura estão representados um retângulo  $[ABCD]$  e uma reta  $r$  que passa no ponto  $A$ . A distância de  $C$  à reta  $r$  é 2 e a distância de  $B$  à reta  $r$  é 6. Além disso,  $\overline{AB} = 2\overline{AD}$ . Então  $\overline{AB}$  é igual a

- (A)  $4\sqrt{3}$  (B) 10  
 (C) 12 (D) 14  
 (E) 16



20. A função  $f(x) = ax + b$  verifica  $f(f(f(1))) = 29$  e  $f(f(f(0))) = 2$ . Qual é o valor de  $a$ ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

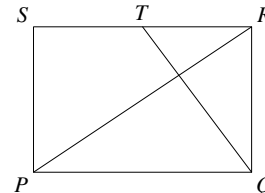
## Problemas de 5 pontos

21. Num conjunto com dez números inteiros positivos exatamente cinco são divisíveis por 5 e exatamente sete são divisíveis por 7. O menor valor possível para o maior destes dez números inteiros é

- (A) 63 (B) 75 (C) 77  
 (D) 105 (E) Nenhum dos números indicados

22. O quadrilátero representado na figura é um retângulo,  $T$  é o ponto médio do segmento  $[RS]$  e  $[QT]$  é perpendicular a  $[PR]$ . A que é igual  $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$ ?

- (A)  $\frac{5}{4}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\frac{3}{2}$   
 (D)  $\sqrt{3}$  (E) 2

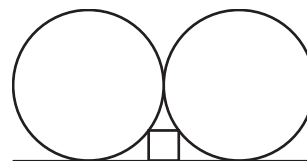


23. A família dos Cangurus Brilhantes tem 9 elementos, sendo cada um deles ou dourado ou prateado. Escolhendo, ao acaso, 3 elementos da família, a probabilidade de nenhum dos 3 ser prateado é  $\frac{2}{3}$ . Quantos elementos da família dos Cangurus Brilhantes são dourados?

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8

24. Na figura estão representados um quadrado, uma reta e duas circunferências de raio 1. As circunferências são tangentes entre si e tangentes à reta. Um dos lados do quadrado está sobre a reta e os 2 vértices opostos a esse lado pertencem, cada um, a uma das circunferências. Quanto mede o lado do quadrado?

- (A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{2}{5}$  (D)  $\frac{1}{2}$  (E)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$



**25.** O Tomás quer escrever números inteiros positivos todos diferentes, não excedendo 100 e cujo produto não seja divisível por 54. No máximo, quantos números pode o Tomás escrever?

- (A) 8                      (B) 17                      (C) 68                      (D) 69                      (E) 90

**26.** Dois polígonos regulares,  $P_1$  e  $P_2$ , têm medida de lado 1 e estão em lados opostos do seu lado comum,  $[AB]$ . O polígono  $P_1$  tem 15 lados e  $P_2$  tem  $n$  lados. Além disso, a distância entre o vértice de  $P_1$  adjacente a  $B$  e distinto de  $A$  e o vértice de  $P_2$  adjacente a  $B$  e distinto de  $A$  é 1. Qual é o valor de  $n$ ?

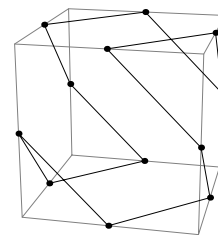
- (A) 10                      (B) 12                      (C) 15                      (D) 16                      (E) 18

**27.** Quantos ternos ordenados de números inteiros positivos  $(k, m, n)$  verificam as igualdades

$$k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1 ?$$

- (A) Nenhum              (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) Uma infinidade

**28.** Na figura está representada uma linha poligonal cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo. Em cada vértice da linha poligonal considera-se o menor ângulo formado pelas duas arestas da linha poligonal com esse vértice em comum. Qual é a soma das amplitudes destes ângulos?



- (A) 720                      (B) 1080                      (C) 1200                      (D) 1440                      (E) 1800

**29.** A função  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  é tal que  $f(4) = 6$  e  $xf(x) = (x - 3)f(x + 1)$  para todo o inteiro  $x$ . A que é igual o produto  $f(4)f(7)f(10) \cdots f(2011)f(2014)$ ?

- (A) 2013                      (B) 2014                      (C)  $2013 \times 2014$   
 (D) 2013!                      (E) 2014!

**30.** Nas florestas de uma ilha mágica viviam apenas 3 tipos de animais: cabras, lobos e leões. Os leões comem lobos e cabras e os lobos comem cabras. Quando um lobo comia uma cabra transformava-se num leão, quando um leão comia um lobo transformava-se numa cabra e quando um leão comia uma cabra transformava-se num lobo. A dada altura viviam nesta ilha 17 cabras, 55 lobos e 6 leões. Atualmente nenhum dos animais restantes pode comer nenhum dos outros. No máximo, quantos animais vivem na ilha?

- (A) 1                      (B) 6                      (C) 17                      (D) 23                      (E) 35